Автоматика и телемеханика, № 7, 2024

Нелинейные системы

© 2024 г. **Д.В. ТУНИЦКИЙ, д-р физ.-мат. наук (dtunitsky@yahoo.com)**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ СБОРОМ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА, РАСПРЕДЕЛЕННОГО НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ[1]

Работа посвящена оптимальному управлению смешанным сбором (стационарным и периодическим импульсным) возобновляемого ресурса, распределенного на поверхности Земли. Примерами такого ресурса служат биологические популяции, в том числе вирусы, химические примеси, пылевые частицы и тому подобное. Доказано, что при бесконечном горизонте планирования существует допустимое управление, обеспечивающее максимум временного среднего сбора.

Ключевые слова: уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера, параболические уравнения второго порядка, полулинейные уравнения на сфере, слабые решения, стабилизация, оптимальное управление.

DOI: 10.31857/S0005231024070043, **EDN:** XRURUS

1. Введение

Обычно в качестве математической модели поверхности Земли используются двумерные многообразия, гомеоморфные сфере. Моделью эволюции возобновляемого ресурса, распределенного на поверхности Земли, может служить полулинейное эволюционное уравнение второго порядка на двумерной сфере, в локальных координатах имеющее вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \sum_{l,m=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^l}\left(a^{l,m}(x)\frac{\partial q}{\partial x^m}\right) = A(x)q - B(x)q^2, \quad a^{l,m}(x) = a^{m,l}(x). \tag{1}$$

Здесь матрица a характеризует диффузию рассматриваемого ресурса, а коэффициенты A и B – темпы обновления и насыщения им среды. По сути, уравнение (1) объединяет две классические модели: логистическую модель Ферхюльста [1] и модель распространения тепла Фурье [2].

Уравнения вида (1) возникают при моделировании разнообразных процессов, связанных с реакцией-диффузией в распределенной среде. Пример – знаменитая модель А.Н. Колмогорова, Г.И. Петровского, Н.С. Пискунова [3] и

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00223).

Р.А. Фишера [4]. Информацию о других моделях, истории и библиографии работ, посвященных этой тематике, можно найти в [5], а также монографии [6], освещающей ряд прикладных аспектов.

Полулинейные эволюционные уравнения второго порядка в областях евклидова пространства весьма досконально изучены, см., например, [7–9]. На замкнутых многообразиях, в частности на сферах, они изучены в меньшей степени. Уместно упомянуть статьи [5] и [10], в которых изучаются уравнения с периодическими по пространству коэффициентами – фактически, уравнения на торе. Этот важный с прикладной точки зрения случай встречается при моделировании периодических сред. Конечно, значительный интерес представляют также уравнения вида (1) на двумерной сфере, потому что это стандартная модель поверхности Земли, используемая при решении прикладных задач.

Заметим, что многие прикладные задачи приводят к уравнениям типа (1) с разрывными коэффициентами. В частности, это характерно для задач оптимального управления. Поэтому желательно выбрать класс допустимых решений, позволяющий построить удовлетворительную теорию соответствующих уравнений при минимальных требованиях к регулярности их коэффициентов. Таким классом в данной работе выступают слабые решения. В классе слабых решений удается исследовать уравнения вида (1) на двумерной сфере при достаточно низких требованиях на регулярность их коэффициентов.

2. Функциональные пространства и эволюционные уравнения

2.1. Функциональные пространства

Пусть $\mathbb{S}^2$ – двумерная сфера единичного радиуса $\{(y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = 1\}$, стандартно вложенная в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Стереографическая проекция

$$h : \mathbb{S}^2 \backslash (0,0,1) \ni (y^1, y^2, y^3) \mapsto \frac{(y^1, y^2)}{1 - y^3} \in \mathbb{R}^2$$

относительно полюса $(0,0,1)$ задает локальную систему координат, определенную на $\mathbb{S}^2$ всюду, кроме полюса [11] (лекция 6). Вложение в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ индуцирует на $\mathbb{S}^2$ риманову метрику g, обратный образ которой относительно h^{-1} имеет вид

$$(h^{-1})^* g = 4 \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}{((x^1)^2 + (x^2)^2 + 1)^2}.$$

Здесь h^{-1} – отображение, обратное к стереографической проекции, т.е.

$$h^{-1} : \mathbb{R}^2 \ni (x^1, x^2) \mapsto \frac{1}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1} (2x^1, 2x^2, (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1) \in \mathbb{S}^2. \quad (2)$$

Метрика g, определенная на касательном расслоении $T\mathbb{S}^2$, допускает естественное продолжение на тензорные расслоения $(T\mathbb{S}^2)^{\otimes^m} \bigotimes (T^*\mathbb{S}^2)^{\otimes^l}$, $m, l = 0, 1, 2, \dots$, которое будет обозначаться той же буквой g. На $(T\mathbb{S}^2)^{\otimes^0} \bigotimes (T^*\mathbb{S}^2)^{\otimes^0} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ метрика $g(r_1, r_2) = r_1 r_2$ для $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Также g порождает на $\mathbb{S}^2$ структуру полного метрического пространства и меру $\mu = \mu_g$, образ которой относительно стереографической проекции имеет вид

$$d(\mu \circ h) = \frac{4dx^1 dx^2}{((x^1)^2 + (x^2)^2 + 1)^2}. \tag{3}$$

С помощью указанных структур конструируются пространства Лебега функций $L^p(\mathbb{S}^2)$ и тензорных полей $L^p\big((T\mathbb{S}^2)^{\otimes^m} \bigotimes (T^*\mathbb{S}^2)^{\otimes^l}\big)$, $p \geqslant 1$, $m, l = 0, 1, 2, \dots$, пространства Соболева $W^{1,p}(\mathbb{S}^2)$ и $W^{1,p}\big((T\mathbb{S}^2)^{\otimes^m} \bigotimes (T^*\mathbb{S}^2)^{\otimes^l}\big)$ [12, гл. 2] и Гельдера $C^\alpha(\mathbb{S}^2)$ и $C^\alpha((T\mathbb{S}^2)^{\otimes^m} \bigotimes (T^*\mathbb{S}^2)^{\otimes^l})$, $0 < \alpha \leqslant 1$ [13, разд. 10.2.4; 14; 15; 16, §1]. Для этого можно использовать стереографические координаты (2). Например, пространства функций $L^p(\mathbb{S}^2)$ на сфере и $L^p(\mathbb{R}^2, \mu \circ h)$ на плоскости с мерой (3) изометричны при $p \geqslant 1$.

Для заданных на $\mathbb{S}^2$ вещественнозначных измеримых функций u и v положим

$$ess \sup_{x \in \mathbb{S}^2} u(x) = \inf_{\substack{S \subseteq \mathbb{S}^2, \\ \mu(S) = 0}} \sup_{x \in \mathbb{S}^2 \setminus S} u(x),$$

$$ess \inf_{x \in \mathbb{S}^2} u(x) = \sup_{\substack{S \subseteq \mathbb{S}^2, \\ \mu(S) = 0}} \inf_{x \in \mathbb{S}^2 \setminus S} u(x), \langle u, v \rangle = \int\limits_{\mathbb{S}^2} uv d\mu.$$

Если $\mathfrak{B}$ – банахово пространство с нормой $\| \cdot \|_{\mathfrak{B}}$, то для фиксированных $T_0 \in (0, +\infty)$ и $T_1 \in (0, +\infty]$, $T_0 < T_1$, пространства $L^p([T_0, T_1); \mathfrak{B})$ с нормами

$$\|q\|_{L^p([T_0,T_1);\mathfrak{B})} = \left(\int\limits_{T_0}^{T_1} \|q(t)\|_{\mathfrak{B}}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geqslant 1,$$

$$\|q\|_{L^\infty([T_0,T_1);\mathfrak{B})} = ess \sup_{t \in [T_0, T_1)} \|q(t)\|_{\mathfrak{B}}$$

являются тоже банаховыми, см. [17, гл. III, §1; 18, гл. II, §2]. Пересечение

$$W([T_0, T_1); X) = L^2((T_0, T_1); W^{p,1}(X)) \cap L^\infty([T_0, T_1); L^2(X))$$

также является банаховым пространством с нормой

$$\|q\|^2_{W([T_0,T_1);X)} = ess \sup_{t \in [T_0, T_1)} \langle q(t), q(t) \rangle + \int\limits_{T_0}^{T_1} \langle g(dq(t), dq(t)), 1 \rangle dt.$$

Для краткости в дальнейшем будем использовать сокращение *п.в.*, когда речь идет о выполнении каких-либо свойств почти всюду по мере μ на $\mathbb{S}^2$, см. (3).

Предположим, что наряду с g на сфере $\mathbb{S}^2$ задана еще одна метрика a. Пусть она измерима и существуют такие $a_0, a_1 \in (0, +\infty)$, что

$$a_0 g(\eta,\eta) \leqslant a(\eta,\eta) \leqslant a_1 g(\eta,\eta), \quad \eta \in T^*\mathbb{S}^2, \tag{4}$$

п.в. В стереографических координатах x^1 и x^2 (2) оценка (4) имеет вид

$$\frac{4a_0(\eta_1^2+\eta_2^2)}{((x^1)^2+(x^2)^2+1)^2} \leqslant a^{1,1}(t)\eta_1^2 + 2a^{1,2}(t)\eta_1\eta_2 + a^{2,2}(t)\eta_2^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4a_1(\eta_1^2+\eta_2^2)}{((x^1)^2+(x^2)^2+1)^2}.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор $d^*_{a,g} : C^\infty(T^*\mathbb{S}^2) \ni w \mapsto d^*_{a,g} w \in \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$, сопряженный с внешним дифференцированием d относительно метрик g и a, т.е.

$$\langle a(du,\omega), 1\rangle_g = \langle u, d^*_{a,g}\omega\rangle_g, \quad u \in C^\infty(\mathbb{S}^2), \;\; \omega \in C^\infty(T^*\mathbb{S}^2),$$

[19, гл. VIII, §1]. В системе стереографических координат x^1 и x^2 (2)

$$d^*_{a(t),g}\omega = -(((x^1)^2+(x^2)^2+1)^2)\times$$
$$\times \sum_{l,m=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{a(dx^l,dx^m)}{(((x^1)^2+(x^2)^2+1)^2)}\,\omega\Big(\frac{\partial}{\partial x^m}\Big)\right).$$

Определим на функциях $u \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ *геометрический лапласиан* (*оператор Лапласа–де Рама*) – линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$\triangle = \triangle_{a,g} = d^*_{a,g} \circ d, \tag{5}$$

[20, гл. IV, §5]. В силу оценки (4) оператор (5) *равномерно эллиптичен* на $\mathbb{S}^2$.

Следовательно, эволюционное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \triangle q = (A(x) - u(x))q - B(x)q^2 \tag{6}$$

параболично на $\mathbb{S}^2$. В стереографических координатах x^1 и x^2 (2) оно принимает вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} - (((x^1)^2+(x^2)^2+1)^2)\sum_{l,m=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{a(dx^l,dx^m)}{(((x^1)^2+(x^2)^2+1)^2)}\frac{\partial u}{\partial x^m}\right) =$$
$$= (A(x)-u(x))q - B(x)q^2,$$

ср. с (1). Неизвестная функция $q = q(t,x)$ соответствует плотности распределения рассматриваемого возобновляемого ресурса в точке x сферы $\mathbb{S}^2$ в момент времени t, метрика a характеризует диффузию ресурса, функция u – управление его стационарным (перманентным) сбором, а коэффициенты A и B – темпы обновления и насыщения им среды.

Обычным образом определяются слабые решения, субрешения и суперрешения [8, гл. VI, §1, 5] и [9, §1.5]. В частности, *слабым решением* уравнения (6) на полуинтервале $[T_0, T_1)$ называется такая функция $q \in W([T_0, T_1); \mathbb{S}^2)$, что $q^2 \in L^2([T_0, T_1) \times \mathbb{S}^2)$ и

$$\langle q, p\rangle(t) + \int\limits_{T_0}^{t} \Big(\langle dq, dp\rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)} - \langle q, p'\rangle\Big)(\tau)d\tau =$$

$$= \langle q, p\rangle(0) + \int\limits_{T_0}^{t} \langle (A-u)q - Bq^2, p\rangle(\tau)d\tau$$

для всякого $p \in C^\infty([T_0, T_1); \mathbb{S}^2)$ и $t \in [T_0, T_1)$. Слабое решение q уравнения (1.5), принимающее заданное начальное значение плотности распределения ресурса

$$q(T_0) = q_0, \quad q_0 \in L^\infty(\mathbb{S}^2), \;\; q_0 \geqslant 0 \text{ п.в.}, \tag{7}$$

называется *слабым решением задачи Коши* (6), (7) *на* $[T_0, T_1)$.

В дальнейшем изложении все встречающиеся решения, субрешения и суперрешения предполагаются слабыми и прилагательное «слабое» для краткости опускается.

3. Периодический импульсный сбор и управляемые решения

3.1. Периодический импульсный сбор

Математической моделью периодического импульсного сбора возобновляемого ресурса служат накладываемые на решение q задачи Коши (6), (7) дополнительные условия

$$q(kT) = sq(kT-), \;\; k = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Здесь $T \in (0, +\infty)$ – заданный период, а измеримый множитель s, $0 \leqslant s \leqslant 1$ *п.в.*, характеризует интенсивность импульсного сбора. Решением задачи (6), (8) называется функция $q \in L^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{S}^2)$, являющаяся решением уравнения (6) на $[kT, (k+1)T)$, обладающая левыми предельными значениями $q(kT-)$ и *п.в.* удовлетворяющая равенствам (8). Если при $T_0 = 0$ это решение *п.в.* принимает начальное значение (7), то оно – решение задачи (6)–(8). Решение задачи (6), (8) называется *периодическим*, если

$$q(t+T) = q(t), \;\; t \in [0, +\infty). \tag{9}$$

Определим *допустимые множества* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{S}$ *стационарных и импульсных управлений*

$$\begin{gathered} \mathfrak{U} = \{u \in L^\infty(\mathbb{S}^2) \mid U_1 \leqslant u \leqslant U_2\}, \\ \mathfrak{S} = \{e^{-\beta v} \mid v \in L^\infty(\mathbb{S}^2), V_1 \leqslant v \leqslant V_2, \langle 1, v\rangle \leqslant E\}, \end{gathered} \tag{10}$$

где $U_1, U_2, V_1, V_2, \beta \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$ и $E \in [0, +\infty)$. Здесь U_1 и U_2 характеризуют ограничения на возможную плотность стационарного сбора ресурса, E – допустимое усилие сбора, а границы V_1 и V_2 – минимально технически реализуемую плотность импульсного сбора и его максимально возможную плотность при доступных физической емкости среды и экологических ограничениях. По сути $V_1(x)$ и $V_2(x)$ – это минимальное и максимальное усилия, которые допустимо приложить в точке x для достижения поставленных целей. Вид $s = e^{-\beta(x)v(x)}$ множителя импульсного воздействия в (8) происходит из теории поиска [21–23]. Сомножитель $\beta(x)$ в показателе экспоненты характеризует сложность обнаружения и извлечения ресурса в точке $x \in \mathbb{S}^2$, а $v(x)$ – величину прилагаемого усилия.

Замечание 1. Несложно проверить, что введенные выше множества допустимых стационарных и импульсных управлений $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{S}$ (10) выпуклы, замкнуты в $L^2(\mathbb{S}^2)$ и ограничены в $L^\infty(\mathbb{S}^2)$. Поскольку пространство $L^2(\mathbb{S}^2)$ рефлексивно, то по теореме Эберлейна–Шмульяна ограниченные в норме $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}$ множества секвенциально слабо предкомпактны [24, прилож. к гл. V, §4]. Кроме того, всякое выпуклое и замкнутое подмножество $L^2(\mathbb{S}^2)$ слабо замкнуто [25, п. 2.9]. Поэтому множества допустимых управлений $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{S}$ секвенциально слабо компактны. Подмножество в $L^2(\mathbb{S}^2)$ тогда и только тогда слабо компактно, когда оно секвенциально слабо компактно, и секвенциально слабо предкомпактные множества ограничены по норме [25, п. 2.9]. Следовательно, множества $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{S}$ слабо секвенциально компактны в $L^2(\mathbb{S}^2)$ [24, прилож. к гл. V, §4].

Замечание 2. Очевидно, что $q = 0$ является периодическим субрешением задачи (6)–(8). Согласно ограничениям, наложенным выше на уравнение (6) и допустимые управления, $B \geqslant B_0 > 0$ и $0 \leqslant s \leqslant 1$ *п.в.* Поэтому постоянная функция $q = c$ является периодическим суперрешением задачи (6)–(8) при $c \geqslant Q(\| q_0 \|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)})$, где

$$(11)\quad Q : \mathbb{R} \ni r \mapsto \max\left\{r, \frac{1}{B_0}(\|A\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} + \max\{\|U_1\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}, \|U_2\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}\})\right\} \in \mathbb{R}.$$

3.2. Управляемые решения

Решения $q = q(t; q_0, u, s)$ задачи (6)–(8) и периодические решения $q = q(t; u, s)$ задачи (6), (8) с допустимыми управлениями $u \in \mathfrak{U}$ и $s \in \mathfrak{S}$ будем называть *управляемыми*. Они обладают следующими свойствами.

Теорема 1. *Пусть метрика a измерима и удовлетворяет оценке (4), коэффициенты $A, B \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$ и $B \geqslant B_0$ п.в. при некотором $B_0 \in (0, +\infty)$. Справедливо следующее.*

(a) *Для любых $u \in \mathfrak{U}$, $s \in \mathfrak{S}$ существует единственное управляемое решение $q = q(t; q_0, u, s)$. При этом $q \in C([(k-1)T, kT); L^2(\mathbb{S}^2))$, $k = 0, 1, \ldots$, выполняется оценка*

$$(12)\qquad 0 \leqslant q(t; q_0, u, s) \leqslant Q\left(\| q_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}\right), \quad t \in [0, +\infty),$$

где Q – функция (11), и для любого $\varepsilon \in (0, T)$ найдется такое число α, $0 < \alpha \leqslant 1$, что

$$q \in C^{\alpha}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}[(k-1)T + \varepsilon, kT) \times \mathbb{S}^2\right).$$

(б) *Если последовательности $\{q_m\} \subseteq L^{\infty}(\mathbb{S}^2), \{u_m\} \subseteq \mathfrak{U}, \{s_m\} \subseteq \mathfrak{S}$ слабо сходятся в $L^2(\mathbb{S}^2)$, $q_m \rightharpoonup q_0$, $u_m \rightharpoonup u_0$, $s_m \rightharpoonup s_0$ и $q_m \geqslant 0$, $q_m \neq 0$ п.в., то имеет место сходимость*

$$\lim_{m\to+\infty} q\,(\cdot\,; q_m, u_m, s_m) = q\,(\cdot\,; q_0, u_0, s_0),$$

слабая в пространствах $L^2([0, NT); W^{1,2}(\mathbb{S}^2))$ при любом $N = 1, 2, \ldots$ и в нормах $\|\cdot\|_{C(\cup_{k=1}^{N}[(k-1)T+\varepsilon, kT)\times\mathbb{S}^2)}$ при любом $\varepsilon \in (0, T)$.

(в) *Для любых $u \in \mathfrak{U}$, $s \in \mathfrak{S}$ существует такое единственное управляемое периодическое решение $q = q_{\infty}(t; u, s)$, что имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{t\to+\infty} \|q(t; q_0, u, s) - q_{\infty}(t; u, s)\|_{L^{\infty}(\mathbb{S}^2)} = 0, \ \ \|q_0\|_{L^{\infty}(\mathbb{S}^2)} > 0.$$

(г) *Если последовательности $\{u_m\}\subseteq\mathfrak{U}$ и $\{s_m\}\subseteq\mathfrak{S}$ слабо сходятся в $L^2(\mathbb{S}^2)$, $u_m \rightharpoonup u_0, s_m \rightharpoonup s_0$, то для периодических решений из утверждения* (c) *имеет место сходимость*

$$\lim_{m\to+\infty} q_{\infty}(\cdot\,; u_m, s_m) = q_{\infty}(\cdot\,; u_0, s_0),$$

слабая в пространстве $L^2((0, T); W^{1,2}(\mathbb{S}^2))$ и в нормах $\|\cdot\|_{C([\varepsilon,T)\times\mathbb{S}^2)}$ при $\varepsilon \in$ $\in (0, T)$.

Доказательство проведено в разделе 5 §4.

Замечание 3. Существует не более двух периодических решений q задачи (6), (8). Согласно замечанию 2, одним из них является тривиальное решение $q = 0$. Если $q_{\infty} = 0$, то по теореме 1 другого не существует, а если $q_{\infty} \neq 0$, то не существует третьего.

4. Постановка задачи, основной результат и выводы

4.1. Постановка задачи

По утверждению (а) теоремы 1 для множеств допустимых стационарных и импульсных управлений $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{S}$ (10) корректно определен функционал

$$F : \{q_0 \in L^{\infty}(\mathbb{S}^2) | q_0 \geqslant 0 \text{ п.в.}\} \times \mathfrak{U} \times \mathfrak{S} \ni (q_0, u, s) \longmapsto$$

$$\longmapsto \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\left(\int_0^t \langle q(\tau; q_0, u, s), u\rangle d\tau + \sum_{0<kT\leqslant t} \langle q(kT-; q_0, u, s), 1 - s\rangle\right) \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

где $q = q(t; q_0, u, s)$ – управляемое решение. Его значение – усредненная по времени сумма стационарного (первое слагаемое) и импульсного (второе слагаемое) сборов ресурса. Поставим следующую задачу: *установить существование допустимых стационарного и импульсного управлений* $u_0 \in \mathfrak{U}$, $s_0 \in \mathfrak{S}$, *доставляющих максимум функционалу* F (13), *и выяснить влияние начального значения* q_0 (7) *на величину* $F(q_0, u_0, s_0)$, *ср. с* [26] *и* [27].

4.2. Основной результат

С помощью теоремы 1 можно дать исчерпывающее решение поставленной задачи. А именно, справедливо следующее утверждение, ср. с [28].

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда справедливо следующее.

(а) *При любых начальных значениях* q_0 (7), $\|q_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} > 0$, *и допустимых управлениях* $u \in \mathfrak{U}$, $s \in \mathfrak{S}$ *имеет место равенство*

$$F(q_0, u, s) = F(q_\infty(0; u, s), u, s) =$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_0^T \langle q_\infty(\tau; u, s), u\rangle d\tau + \langle q_\infty(T-; u, s), 1 - s\rangle\right). \tag{14}$$

(б) *Если последовательности* $\{u_m\} \subseteq \mathfrak{U}$ *и* $\{s_m\} \subseteq \mathfrak{S}$ *слабо сходятся в* $L^2(\mathbb{S}^2)$, $u_m \rightharpoonup u_0$ *и* $s_m \rightharpoonup s_0$, *а последовательность* $\{q_m\} \subseteq L^\infty(\mathbb{S}^2)$ *и* $q_m \geqslant 0$, $q_m \neq 0$ *п.в., то*

$$\lim_{m\to+\infty} F(q_m, u_m, s_m) = F(q_\infty(0; u_0, s_0), u_0, s_0).$$

(в) *Функционал* F (13) *ограничен и его точная верхняя грань достигается на допустимых управлениях* $u_0 \in \mathfrak{U}$ *и* $s_0 \in \mathfrak{S}$, *так что справедливо равенство*

$$\sup F(q_0, u, s) = F(q_\infty(0;\, u_0, s_0), u_0, s_0).$$

Доказательство.

(а) Ясно, что величина функционала $F(q_0, u, s)$ не изменится при замене в его определении (13) нулевых нижних пределов интегрирования и суммирования на любое $T_0 \in [0, +\infty)$. Далее, для управляемых решений $q = q(t; q_0, u, s)$ задачи (6)–(8) и периодического решения $q = q_\infty(t; u, s)$ задачи (6), (8) имеем

$$\left|\int_{T_0}^t \langle q(\tau) - q_\infty(\tau), u\rangle d\tau + \sum_{T_0 < kT \leqslant t} \langle q(kT-) - q_\infty(kT-), 1 - s\rangle\right| \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg(t \parallel u \parallel_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \sup_{\tau \geqslant T_0} \|q(\tau) - q_\infty(\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} +$$

$$+ [t]\|1 - s\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)} \sup_{kT \geqslant T_0} \|q(kT-) - q_\infty(kT-)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant t\Big(\max\{\|U_1\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}, \|U_2\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}\} + 1\Big) \sup_{\tau \geqslant T_0} \|q(\tau) - q_\infty(\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)},$$

$$t \in [T_0, +\infty).$$

Отсюда по утверждению (в) теоремы 1 заключаем, что $|F(q_0, u, s) - F(q_\infty(0; u, s), u, s)| = 0$. По определению (13) $F(q_\infty(0; u, s), u, s)$ равно правой части равенства (14).

(б) По утверждению (а) имеем

$$F(q_0, u_m, s_m) = \frac{1}{T}\left(\int\limits_0^T \langle q_\infty(\tau; u_m, s_m), u_m\rangle d\tau + \langle q_\infty(T-; u_m, s_m), 1 - s_m\rangle\right).$$

По утверждению (г) теоремы 1 в правой части этого равенства можно перейти к пределу при $m \to +\infty$ [29, гл. 1, §5], в результате чего с учетом (14) получим доказываемое.

(в) Найдутся такие последовательности начальных значений $\{q_m\} \subseteq L^\infty(\mathbb{S}^2)$ и допустимых управлений $\{u_m\} \subseteq \mathfrak{U}$ и $\{s_m\} \subseteq \mathfrak{S}$, что

$$\sup F(q_0, u, s) = \lim_{m\to+\infty} F(q_m, u_m, s_m).$$

Согласно замечанию 1 множества допустимых управлений $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{S}$ секвенциально слабо компактны в $L^2(\mathbb{S}^2)$. Поэтому найдутся слабо сходящиеся в $L^2(\mathbb{S}^2)$ подпоследовательности $\{u_{m_l}\}$ и $\{s_{m_l}\}$, $u_{m_l} \rightharpoonup u_0 \in \mathfrak{U}$ и $s_{m_l} \rightharpoonup s_0 \in \mathfrak{S}$. Следовательно, по утверждению (б) получаем

$$\sup F(q_0, u, s) = \lim_{m\to+\infty} F(q_m, u_m, s_m) = F(q_\infty(0; u_0, s_0), u_0, s_0).$$

Теорема доказана.

4.3. Выводы

По утверждению (в) теоремы 1 после выбора допустимых стационарного и импульсного управлений плотность распределения возобновляемого ресурса при любых ненулевых начальных значениях равномерно стремится к однозначно определенному предельному состоянию. По утверждению (в) теоремы 2 допустимые управления можно выбрать таким образом, чтобы за каждый цикл эксплуатации величина сбора ресурса совпадала с максимально возможной усредненной по времени величиной сбора этого ресурса. Иными словами, выбор оптимального управления эксплуатацией возобновляемого ресурса обеспечивает выход любой ненулевой начальной плотности ресурса к предельному состоянию, обеспечивающему максимальный сбор ресурса за один цикл эксплуатации.

5. Доказательство теоремы 1

5.1. Вспомогательные утверждения

Согласно замечанию 1 субрешением задачи (6)–(8) является нулевая функция $q = 0$, а суперрешением – постоянная функция $q = Q(\|q_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)})$. Поэтому из известных результатов для полулинейных параболических уравнений второго порядка на сфере [30–32] вытекает следующее.

Лемма 1. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда для всякого $u \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$ на полуинтервале $[T_0, +\infty)$ существует единственное решение $q = q(\,\cdot\,; q_0, u)$ задачи (6), (7). *При этом $q \in C([T_0, +\infty); L^2(\mathbb{S}^2))$, $0 \leqslant q(t) \leqslant Q(\|q_0\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)})$ п.в. при $t \in [T_0, +\infty)$ и для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\alpha = \alpha(\varepsilon, \|q\|_{L^\infty([T_0,+\infty))\times(\mathbb{S}^2)})$, $0 < \alpha \leqslant 1$, и $C = C(\varepsilon, \|q\|_{L^\infty([T_0,+\infty))\times\mathbb{S}^2}) \geqslant 0$, что $q \in C^\alpha([T_0 + \varepsilon, +\infty)) \times \mathbb{S}^2$ и $\|q\|_{C^\alpha([T_0+\varepsilon,+\infty))\times(\mathbb{S}^2)} \leqslant C$.*

Кроме того, имеет место следующий факт.

Лемма 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Если последовательности $\{q_m\} \subseteq L^\infty(\mathbb{S}^2)$ и $\{u_m\} \subseteq \mathfrak{U}$ слабо сходятся в $L^2(X)$, $q_m \rightharpoonup q_0$ и $u_m \rightharpoonup u_0$, то для решений $q = q(t; q_m, u_m)$ задачи Коши (6), (7) *имеет место сходимость*

$$\lim_{m\to+\infty} q(\cdot\,;\ q_m, u_m) = q(\cdot\,;\ q_0, u_0),$$

слабая в $L^2([T_0, T_1); W^{1,2}(X))$ и в нормах $\|\cdot\|_{C([T_0+\varepsilon,T_1)\times X)}$ при любом $\varepsilon \in (0, T_1 - T_0)$.

Доказательство. По утверждению (a) теоремы 1 на полуинтервале $[T_0, T_1)$ при $m = 1, 2, \ldots$ существует единственное управляемое решение $q(t; q_m, u_m)$, и поскольку согласно замечанию 1 последовательность $\{\|q_m\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}\}$ ограничена, то

$$0 \leqslant q(t; q_m, u_m) \leqslant Q\left(\sup_{(m=0,1,\ldots} \|q_m\|_{L^\infty(\mathbb{S}^2)}\right), \quad t \in [T_0, T_1), \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Поэтому в силу априорных оценок для решений линейных параболических уравнений второго порядка [8, гл. VI, §1] и [9, §1.5] найдется такая постоянная C_1, что

$$\|q(\cdot\,;\ q_m, u_m)\|_{L^2\big((T_0,T_1);W^{1,2}(X)\big)} \leqslant C_1, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

а по утверждению (a) теоремы 1 для $\varepsilon \in (0, T_1 - T_0)$ найдутся такие C_2 и $0 < \alpha \leqslant 1$, что

$$\|q(\cdot\,;\ q_m, u_m)_{|[T_0+\varepsilon,T_1)\times X}\|_{C^\alpha([T_0+\varepsilon,T_1)\times X)} \leqslant C_2, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

В силу (15) и теоремы Эберлейна–Шмульяна, см. [24, прилож. к гл. V, §4], последовательность $\{q(\cdot\,; q_m, u_m)\}$ секвенциально слабо предкомпактна в $L^2\big((T_0, T_1); W^{1,2}(X)\big)$, поскольку это пространство рефлексивно [17, гл. III, §1]. А в силу (16) и теоремы Асколи–Арцела последовательность $\{q(\cdot\,; q_m, u_m)_{|[T_0+\varepsilon,T_1)\times X}\}$ секвенциально предкомпактна в нормах $\|\cdot\|_{C([T_0+\varepsilon,T_1)\times X)}$. Следовательно, из $\{q(\cdot\,; q_m, u_m)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{q(\cdot\,; q_{m_l}, u_{m_l})\}$, сходящуюся к предельной функции

$$\tilde{q}(t) = \lim_{m\to+\infty} q(t; q_{m_l}, u_{m_l}) \in L^\infty([T_0, T_1); L^\infty(X)),$$

слабо в $L^2((T_0,T_1);W^{1,2}(X))$ и в нормах $\|\cdot\|_{C([T_0+\varepsilon,T_1)\times X)}$ при любом $\varepsilon \in$ $\in (0,T_1-T_0)$.

Определение решения задачи (6), (7) при $q_0 = q_{m_l}$ и $u = u_{m_l}$ принимает вид

$$\langle q(\cdot\,;q_{m_l},u_{m_l}),p\rangle(t)+$$
$$+\int\limits_{T_0}^{t}\left(\langle dq(\cdot\,;q_{m_l},u_{m_l}),dp\rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)}-\langle q(\cdot\,;q_{m_l},u_{m_l}),p'\rangle\right)(\tau)d\tau=$$
$$=\langle q_{m_l},p\rangle(0)+\int\limits_{T_0}^{t}\langle (A-u_{m_l})q(\cdot\,;q_{m_l},u_{m_l})-Bq^2(\cdot\,;q_{m_l},u_{m_l}),p\rangle(\tau)d\tau.$$

В нем можно перейти к пределу при $l\to+\infty$ [29, гл. 1, §5]. В результате получим

$$\langle\tilde q,p\rangle(t)+\int\limits_{T_0}^{t}\left(\langle d\tilde q,dp\rangle_{L^2(T^*\mathbb{S}^2)}-\langle\tilde q,p'\rangle\right)(\tau)d\tau=$$
$$=\langle q_0,p(0)\rangle+\int\limits_{T_0}^{t}\langle (A-u_0)\tilde q-B\tilde q^2,p\rangle(\tau)d\tau,$$

т.е. предельная функция $\tilde q$ является решением задачи (6), (7) на $[T_0,T_1)$ с начальным значением q_0 и стационарным управлением u_0. По утверждению (а) теоремы 1 решение задачи (6), (7) единственно, и, следовательно, $\tilde q(t) =$ $= q(t;q_0,u_0)$. Лемма доказана.

5.2. Доказательство утверждений (а) *и* (б)

Утверждение (а) – следствие леммы 1.

Утверждение (б) доказывается индукцией по $N = 1,2,\ldots$. Для $N = 1$ доказываемое утверждение вытекает из леммы 2 при $[T_0,T_1) = [0,T)$. Пусть оно выполняется для $N \geqslant 1$. Тогда последовательность $\{q(NT-;q_m,u_m,s_m)\}$ сходится к $q(NT-;q_0,u_0,s_0)$ в $\|\cdot\|_{C(X)}$, и потому $\{s_m q(NT-;q_m,u_m,s_m)\}$ слабо сходится к $s_0 q(NT-;q_0,u_0,s_0)$ в $L^2(X)$ [29, гл. 1, §5]. Следовательно, при $[T_0,T_1) = [NT,(N+1)T)$ по лемме 2 имеет место сходимость

$$\lim_{m\to+\infty} q(\cdot\,;\, s_m q(NT-;q_m,u_m,s_m),u_m,s_m)=$$
$$=q(\cdot\,;s_0 q(NT-;q_0,u_0,s_0),u_0,s_0),$$

слабая в $L^2((0,T);W^{1,2}(X))$ и в нормах $\|\cdot\|_{C([\varepsilon,T)\times X)}$ при любом $\varepsilon\in(0,T)$. Таким образом, доказываемое утверждение выполняется и для $N+1$.

5.3. Доказательство утверждения (в)

Выберем произвольное число $r \in (0,+\infty)$ и рассмотрим *функциональный отрезок*

$$[0,Q(r)]_{L^\infty(X)} = \{w \in L^\infty(X) | 0 \leqslant w \leqslant Q(r) \textit{п.в.}\},$$

где Q – функция (11). По лемме 1 корректно определен нелинейный *оператор Пуанкаре*

$$P^u_{[T_0,T_1)} : [0,Q(r)]_{L^\infty(X)} \ni w \mapsto q(T_1; w, u) \in C(X),$$

где $q = q(t; w, u)$ – решение задачи (6), (7) на полуинтервале $[T_0,+\infty)$ с начальным значением $q_0 = w$ и допустимым управлением $u \in \mathfrak{U}$ (10), ср. с [33, гл. III, §21]. При этом

$$0 = P^u_{[0,\frac{T}{2})}0, \quad P^u_{[0,\frac{T}{2})}Q(r) \leqslant Q(r), \quad 0 = P^u_{[\frac{T}{2},T)}0, \quad P^u_{[\frac{T}{2},T)}Q(r) \leqslant Q(r)$$

в силу замечания 2 и принципа сравнения для слабых решений [9, разд. 2.1.2], так что

$$\begin{aligned} &P^u_{[0,\frac{T}{2})}([0,Q(r)]_{L^\infty(X)}) \subseteq [0,Q(r)]_{L^\infty(X)}, \\ &P^u_{[\frac{T}{2},T)}([0,Q(r)]_{L^\infty(X)}) \subseteq [0,Q(r)]_{L^\infty(X)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Для допустимых управлений $s \in \mathfrak{S}$ (10) имеем $0 \leqslant s \leqslant 1$ *п.в.*, поэтому

$$s[0,Q(r)]_{L^\infty(X)} \subseteq [0,Q(r)]_{L^\infty(X)}. \tag{18}$$

Тем самым корректно определена композиция S операторов Пуанкаре и умножения на s,

$$S : [0,Q(r)]_{L^\infty(X)} \ni v \mapsto P^u_{[0,\frac{T}{2})} s P^u_{[\frac{T}{2},T)} v \in [0,Q(r)]_{L^\infty(X)}. \tag{19}$$

Очевидно, что 0 является для S *точкой равновесия*, т.е. $S(0) = 0$, а $Q(r)$ – точкой *суперравновесия*, т.е. $S(Q(r)) \leqslant Q(r)$ [33, гл. I, §1]. В силу утверждения (а) и теоремы Асколи–Арцела оператор S непрерывен и имеет предкомпактный образ. В силу принципа сравнения S сильно сохраняет порядок на $[0,Q(r)]_{L^\infty(X)}$ [33; гл. I, §1]. В силу строгой вогнутости правой части уравнения (6) оператор S строго сублинеен, т.е. $\beta S(v) < S(\beta v)$ для $v \in [0,Q(r)]_{L^\infty(X)} \backslash 0$ и $0 < \beta < 1$. Следовательно, S имеет на отрезке $[0,Q(r)]_{L^\infty(X)}$ при любом $r \in (0,+\infty)$ такую единственную неподвижную точку $v_0 = Sv_0$, что для любого $v \in [0,Q(r)]_{L^\infty(X)} \backslash 0$ имеет место сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \|S^k(v) - v_0\|_{L^\infty(X)} = 0. \tag{20}$$

[33, гл. I, §5]. Далее, согласно включениям (17) и (18) функция

$$q_{\infty,0} = sP^u_{[\frac{T}{2},T)} v_0 \in [0,Q(r)]_{L^\infty(X)}, \tag{21}$$

и поскольку уравнение (6) *автономно*, т.е. все его коэффициенты не зависят от t, то

$$sP^u_{[0,T)}q_{\infty,0} = sP^u_{[0,T)}\left(sP^u_{[\frac{T}{2},T)}v_0\right) = sP^u_{[\frac{T}{2},T)}\left(P^u_{[0,\frac{T}{2})}sP^u_{[\frac{T}{2},T)}v_0\right) =$$
$$= sP^u_{[\frac{T}{2},T)}Sv_0 = sP^u_{[\frac{T}{2},T)}v_0 = q_{\infty,0}.$$

Таким образом, $q_{\infty,0}$ является неподвижной точкой оператора $sP^u_{[0,T)}$. Выберем в качестве $q_\infty(t;u,s)$ решение $q(t;q_{\infty,0},u,s)$ задачи (6), (7), (8), принимающее начальное значение $q_{\infty,0}$ (21). По утверждению (a) это решение существует, единственно, удовлетворяет оценке $0 \leqslant q_\infty(t;u,s) \leqslant Q(r)$ на полуинтервале $[0,+\infty)$ и в силу того, что $q_{\infty,0}$ – неподвижная точка относительно оператора $sP^u_{[0,T)}$, – условию периодичности (9).

Пусть $q(t;q_0,u,s)$ – решение задачи (6), (7), (8) с $q_0 \in [0,Q(r)]_{L^\infty(X)}\backslash 0$. Тогда

$$w(t) = \pm(q(t;q_0,u,s) - q_\infty(t;u,s))$$

удовлетворяет слабому принципу максимума на полуинтервалах $[kT,k(T+1))$, $k=1,2,\dots$ [8, гл. VI, §7] и, следовательно,

$$|q(t;q_0,u,s) - q_\infty(t;u,s)| \leqslant |q(kT;q_0,u,s) - q_\infty(kT;u,s)|, \quad t \in [kT,k(T+1)).$$

Так как $q(kT;q_0,u,s) = (sP^u_{[0,T)})^k q_0$ и $q_\infty(kT;u,s) = (sP^u_{[0,T)})^k q_{\infty,0}$, то отсюда заключаем,

$$\|q(t;q_0,u,s) - q_\infty(t;u,s)\|_{C(X)} \leqslant \left\| \left(sP^u_{[0,T)}\right)^k q_0 - \left(sP^u_{[0,T)}\right)^k q_{\infty,0}\right\|_{L^\infty(X)},$$

и в силу построения S (19) и неподвижности $q_{\infty,0}$ (21) относительно $sP^u_{[0,T)}$ получаем

$$\begin{aligned} &\|q(t;q_0,u,s) - q_\infty(t;u,s)\|_{C(X)} \leqslant \\ &\leqslant \left\|sP^u_{[\frac{T}{2},T)}S^{k-1}P^u_{[0,\frac{T}{2})}q_0 - sP^u_{[\frac{T}{2},T)}v_0\right\|_{L^\infty(X)}, \end{aligned} \tag{22}$$

$t \in [kT,k(T+1))$, ибо $(sP^u_{[0,T)})^k = sP^u_{[\frac{T}{2},T)}\left(P^u_{[0,\frac{T}{2})}sP^u_{[\frac{T}{2},T)}\right)^{k-1}P^u_{[0,\frac{T}{2})}$. Согласно (17) точка

$$P^u_{[0,\frac{T}{2})}q_0 \in P^u_{[0,\frac{T}{2})}([0,Q(r)]_{L^\infty(X)}\backslash 0) \subseteq [0,Q(r)]_{L^\infty(X)}\backslash 0,$$

откуда в силу (22), (20), непрерывности оператора $sP^u_{[\frac{T}{2},T)}$ и произвольности выбора $r \in (0,+\infty)$ вытекает утверждение (a).

5.4. Доказательство утверждения (г)

По лемме 1 найдутся такие постоянные C и α, $0 < \alpha \leqslant 1$, что

$$\|q_\infty(T-; u_m, s_m)\|_{C^\alpha(X)} \leqslant C$$

равномерно по $m = 1, 2, \dots$. Поэтому из $\{q_\infty(T-; u_m, s_m)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{q_\infty(T-; u_{m_l}, s_{m_l})\}$, согласно теореме Асколи–Арцела сходящуюся в норме $\|\cdot\|_{C(X)}$ к предельной функции

$$q_T = \lim_{l \to +\infty} q_\infty(T-; u_{m_l}, s_{m_l}). \tag{23}$$

Достаточно доказать, что независимо от выбора $\{q_\infty(T-; u_{m_l}, s_{m_l})\}$ справедливо равенство

$$q_T = q_\infty(T-; u_0, s_0). \tag{24}$$

Тогда вся последовательность $\{q_\infty(T-; u_m, s_m)\}$ сходится к $q_\infty(T-; u_0, s_0)$ в норме $\|\cdot\|_{C(X)}$ и $\{s_m q_\infty(T-; u_m, s_m)\}$ слабо сходится к $s_0 q_\infty(T-; u_0, s_0)$ в $L^2(X)$ [29, гл. 1, §5], откуда по лемме 2 следует утверждение (г), так как q_∞ удовлетворяет условиям (8) и (9).

Согласно условиям (8) и (9) $q_\infty(0; u_{m_l}, s_{m_l}) = s_{m_l} q_\infty(T-; u_{m_l}, s_{m_l})$. Поэтому

$$q_\infty(t; u_{m_l}, s_{m_l}) = q(t; s_{m_l} q_\infty(T-; u_{m_l}, s_{m_l}), u_{m_l}, s_{m_l}), \quad t \in [0, T),$$

так как решение задачи (6), (7) единственно по лемме 1. В силу (23) подпоследовательность $\{s_{m_l} q_\infty(T-; u_{m_l}, s_{m_l})\}$ слабо сходится в $L^2(X)$ к $s_0 q_T$, так что по лемме 2 в правой части этого равенства можно перейти к пределу, в результате чего получим

$$q_T = q(T-; s_0 q_T, u_0, s_0).$$

Тем самым решение $q = q(t; s_0 q_T, u_0, s_0)$ удовлетворяет условию периодичности

$$q(0; s_0 q_T, u_0, s_0) = s_0 q(T-; s_0 q_T, u_0, s_0),$$

т.е. является периодическим решением задачи (6), (8). Поэтому согласно замечанию 3 либо $q_\infty(T-; u_0, s_0) = q(T-; s_0 q_T, u_0, s_0)$ и тогда (24) справедливо, либо $q_\infty(T-; u_0, s_0) > 0$, $q(T-; s_0 q_T, u_0, s_0) = 0$, что эквивалентно выполнению условий

$$\|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} > 0, \quad q_T = 0. \tag{25}$$

Далее от противного: докажем, что если выполнены условия (25), то утверждение

$$\lim_{\substack{k \to +\infty \\ l \to +\infty}} q(kT-; q_0, u_{m_l}, s_{m_l}) = 0, \qquad q_0 > 0, \tag{26}$$

и его отрицание одновременно ложны, см. 1) и 2) ниже.

1) Пусть выполнены условия (25) и справедливо утверждение (26).

По утверждению (а) для $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $k_0 = k_0(\varepsilon)$, что

$$\|q(kT-;q_0,u_0,s_0) - q_\infty(T-;u_0,s_0)\|_{C(X)} < \varepsilon, \quad k = k_0, k_0+1, \ldots.$$

По утверждению (б) для $\varepsilon > 0$ и $k = 1, 2, \ldots$ найдется такое натуральное $l_0 = l_0(\varepsilon, k)$, что

$$\|q(kT-;q_0,u_{m_l},s_{m_l}) - q(kT-;q_0,u_0,s_0)\|_{C(X)} < \varepsilon, \quad l_0, l_0+1, \ldots.$$

Следовательно, поскольку

$$\begin{gathered}\|q(kT-;q_0,u_{m_l},s_{m_l})\|_{C(X)} \geqslant \|q_\infty(T-;u_0,s_0)\|_{C(X)} - \\ - \|q(kT-;q_0,u_0,s_0) - q_\infty(T-;u_0,s_0)\|_{C(X)} - \\ - \|q(kT-;q_0,u_{m_l},s_{m_l}) - q(kT-;q_0,u_0,s_0)\|_{C(X)},\end{gathered}$$

то для любого $\varepsilon > 0$, $k = k_0(\varepsilon), k_0(\varepsilon)+1, \ldots$ и $l = l_0(\varepsilon,k), l_0(\varepsilon,k)+1, \ldots$ выполняется

$$\|q(kT-;q_0,u_{m_l},s_{m_l})\|_{C(X)} \geqslant \|q_\infty(T-;u_0,s_0)\|_{C(X)} - 2\varepsilon.$$

Отсюда, выбрав $\varepsilon = \frac{\|q_\infty(T-;u_0,s_0)\|_{C(X)}}{4} > 0$ в соответствии с (25), выводим оценку

$$\|q(kT-;q_0,u_{m_l},s_{m_l})\|_{C(X)} \geqslant \frac{\|q_\infty(T-;u_0,s_0)\|_{C(X)}}{2},$$

противоречащую утверждению (26). Таким образом, условия (25) и утверждение (26) приводят к противоречию.

2) Пусть выполнены условия (25), а утверждение (26) несправедливо. Тогда при некотором начальном значении q_0 (7), $q_0 > 0$, существует такое $\delta_0 > 0$, что для $N = 1, 2, \ldots$ найдутся номера $k_0 = k_0(N) \geqslant N$ и $l_0 = l_0(N) \geqslant N$, при которых

$$\left\|q(k_0(N)T-;q_0,u_{m_{l_0(N)}},s_{m_{l_0(N)}})\right\|_{C(X)} \geqslant \delta_0. \tag{27}$$

В силу (23) и (25) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $l_1 = l_1(\varepsilon)$, что

$$\|q_\infty(T-;u_{m_l},s_{m_l})\|_{C(X)} < \varepsilon, \quad l = l_1, l_1+1, \ldots.$$

По утверждению (а) для $\varepsilon > 0$ и $l = 1, 2, \ldots$ найдется такое натуральное $k_1 = k_1(\varepsilon, l)$, что

$$\|q(kT-;q_0,u_{m_l},s_{m_l}) - q_\infty(T-;u_{m_l},s_{m_l})\|_{C(X)} < \varepsilon, \quad k = k_1, k_1+1, \ldots.$$

Поэтому для $0 < \delta \leqslant \delta_0$ при $l = l_1\left(\frac{\delta}{2}\right), l_1\left(\frac{\delta}{2}\right)+1, \ldots$ и $k = k_1\left(\frac{\delta}{2}, l\right), k_1\left(\frac{\delta}{2}, l\right)+1, \ldots$ имеем

$$\left\|q\left(k_0(N)T-; q_0, u_{m_{l_0(N)}}, s_{m_{l_0(N)}}\right)\right\|_{C(X)} \|q(kT-; q_0, u_{m_l}, s_{m_l})\|_{C(X)} \leqslant \leqslant \|q(kT-; q_0, u_{m_l}, s_{m_l}) - q_\infty(T-; q_0, u_{m_l}, s_{m_l})\|_{C(X)} + + \|q_\infty(T-; q_0, u_{m_l}, s_{m_l})\|_{C(X)} < \delta. \tag{28}$$

Из (27) и (28) заключаем, что для $N = l_1\left(\frac{\delta}{2}\right), l_1\left(\frac{\delta}{2}\right) + 1, \ldots$ найдется такой номер

$$k_2 = k_2(\delta, k_0(N), l_0(N)) \in \left\{k_0(N), \ldots, k_1\left(\frac{\delta}{2}, l_0(N)\right) - 1\right\},$$

при котором справедливы неравенства

$$\left\|q\left(k_2(\delta, k_0(N), l_0(N))T-; q_0, u_{m_{l_0(N)}}, s_{m_{l_0(N)}}\right)\right\|_{C(X)} \geqslant \delta, \tag{29}$$

$$\left\|q\left((k_2(\delta, k_0(N), l_0(N)) + k)T-; q_0, u_{m_{l_0(N)}}, s_{m_{l_0(N)}}\right)\right\|_{C(X)} < \delta, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Рассмотрим последовательность $\{q_N\}$, где

$$q_N = q(k_2(\delta, k_0(N), l_0(N))T-; q_0, u_{m_{l_0(N)}}, s_{m_{l_0(N)}}), \quad N = l_1\left(\frac{\delta}{2}\right), l_1\left(\frac{\delta}{2}\right) + 1, \ldots.$$

По утверждению (а) найдутся такие постоянные C и α, $0 < \alpha \leqslant 1$, что $\|q_N\|_{C^\alpha(X)} \leqslant C$ равномерно по N. Выберем из $\{q_N\}$ подпоследовательность $\{q_{N_\beta}\}$, согласно теореме Асколи–Арцела сходящуюся в норме $\|\cdot\|_{C(X)}$ к предельной функции

$$q_{0,\infty} = \lim_{\beta \to +\infty} q_{N_\beta}.$$

Норма $\|q_{0,\infty}\|_{C(X)} \geqslant \delta$ в силу первого неравенства (29). Поскольку последовательность $\left\{s_{m_{l_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}\right\}$ слабо сходится в $L^2(X)$ к $s_0 q_{0,\infty}$ [29, гл. 1, §5], то по утверждению (б) для произвольного $\varepsilon > 0$ и $k = 1, 2, \ldots$ найдется такое $\beta_0 = \beta_0(\varepsilon, k)$, что

$$\left\|q\left(kT-; s_{m_{l_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}, u_{m_{l_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}, s_{m_{l_0(N_\beta)}}\right) - q(kT-; s_0 q_{0,\infty}, u_0, s_0)\right\|_{C(X)} < \varepsilon \tag{30}$$

при $\beta = \beta_0, \beta_0 + 1, \ldots$. По утверждению (в) для $\varepsilon > 0$ найдется такое $k_3 = k_3(\varepsilon)$, что

$$\|q(kT-; s_0 q_{0,\infty}, u_0, s_0) - q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} < \varepsilon, \quad k = k_3, k_3 + 1, \ldots. \tag{31}$$

Следовательно, имеют место два следующих факта. Во-первых, поскольку

$$\left\|q\left(kT-; s_{m_{l_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}, u_{m_{l_0(N_\beta)}}, s_{m_{l_0(N_\beta)}}\right)\right\|_{C(X)} \geqslant \|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} - - \|q(kT-; s_0 q_{0,\infty}, u_0, s_0) - q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} - - \left\|q\left(kT-; s_{m_{l_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}, u_{m_{l_0(N_\beta)}}, s_{m_{l_0(N_\beta)}}\right) - q(kT-; s_0 q_{0,\infty}, u_0, s_0)\right\|_{C(X)},$$

то согласно (31) и (30) при $k \geqslant k_3(\varepsilon)$ и $\beta \geqslant \beta_0(\varepsilon, k)$ имеем

$$\begin{aligned}(32)\qquad &\left\| q\left(kT-; s_{m_{l_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}, u_{m_{l_0(N_\beta)}}, s_{m_{l_0(N_\beta)}}\right)\right\|_{C(X)} \geqslant \\ &\geqslant \|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} - 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Во-вторых, поскольку в силу построения q_N и автономности уравнения (6)

$$\begin{aligned}&q\left(kT-; s_{m_{l_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}, u_{m_{l_0(N_\beta)}}, s_{m_{l_0(N_\beta)}}\right) = \\ &= q\left((k_2(\delta, k_0(N), l_0(N)) + k)T-; q_0, u_{m_{l_0(N)}}, s_{m_{l_0(N)}}\right),\end{aligned}$$

то согласно второму неравенству (29) имеем

$$(33)\qquad \left\| q\left(kT-; s_{m_{l_0(N_\beta)}} q_{N_\beta}, u_{m_{l_0(N_\beta)}}, s_{m_{l_0(N_\beta)}}\right)\right\|_{C(X)} < \delta, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Из (32) и (33) при $k = k_3(\varepsilon)$ и $\beta = \beta_0(\varepsilon, k_3(\varepsilon))$ выводим неравенство

$$\|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} < \delta + 2\varepsilon.$$

Выбрав в этом неравенстве

$$\varepsilon = \frac{\|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)}}{4} \quad \text{и} \quad \delta = \min\left\{\frac{\|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)}}{4}, \delta_0\right\}$$

согласно первому условию (25), получаем противоречивую оценку $\|q_\infty(T-; u_0, s_0)\|_{C(X)} < 0$. Тем самым условия (25) и отрицание утверждения (26) также приводят к противоречию.

Автор выражает благодарность А.А. Давыдову за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Verhulst P.F.* Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement // Correspondance Math. Phys. 1838. No. 10. P. 113–121.
2. *Fourier J.B.J.* Theorie Analytique de la Chaleur. Paris: F. Didot, 1822.
3. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. МГУ. Сер. А. Математика и Механика. 1937. Т. 1. № 6. С. 1–26.
4. *Fisher R.A.* The advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. 1937. V. 7. P. 335–369.
5. *Berestycki H., Francois H., Roques L.* Analysis of the periodically fragmented environment model : I – Species persistence // J. Math. Biol. 2005. V. 51. P. 75–113.
6. *Pethame B.* Parabolic Equations in Biology, Heidelberg: Springer, 2015.

7. *Ладыженская О.А., Уральцева В.А., Солонников Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
8. *Lieberman G.M.* Second Order Parabolic Differential Equations. New Jersey: World Scientific, 2005.
9. *Wang M.* Nonlinear Second Order Parabolic Equations. CRC Press, Boca Ration, 2021.
10. *Berestycki H., Francois H., Roques L.* Analysis of the periodically fragmented environment model: II – Biological invasions and pulsating travelling fronts // J. Math. Pures Appl. 84 (2005), 1101–1146.
11. *Постников М.М.* Гладкие многообразия. М.: Наука, 1988.
12. *Hebbey E.* Sobolev Spaces on Riemannian Manifolds. Berlin: Springer, 1996.
13. *Nicolaescu L.I.* Lectures on the Geometry of Manifolds. New Jersey: World Scientific, 2021.
14. *Туницкий Д.В.* О построении решений полулинейных эллиптических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях // Труды 14-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2021). 27–29 сентября 2021 г., Москва, Россия. М.: ИПУ РАН, 2021. С. 717–723.
15. *Tunitsky D.V.* On Solvability of Second-Order Semilinear Elliptic Equations on Spheres // Proceedings of the 14th International Conference «Management of large-scale system development» (MLSD), 27–29 September, 2021, Moscow, Russia. IEEE Explore, 22 November 2021. P. 1–4. https://ieeexplore.ieee.org/document/9600203
16. *Туницкий Д.В.* О разрешимости полулинейных эллиптических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях // Изв. РАН. Серия математическая. 2022. Т. 86. № 5. С. 97–115.
17. *Showalter R.E.* Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations. AMS, Providence, RI, 1997.
18. *Lions J.L.* Equations differentielles operationnelles et problemes aux limites, Berlin: Springer-Verlag, 1961.
19. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. М.: Мир, 1970.
20. *Уэллс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976.
21. *Давыдов А.А., Мельник Д.А.* Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с периодическим импульсным отбором // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27. № 2. С. 99–107.
22. *Koopman B.O.* The theory of search. III. The optimum distribution of search effort // Oper. Res. 1957. No. 5. P. 613–626.
23. *Жиков В.В.* Математические проблемы теории поиска // Тр. Владимир. политех. ин-та, 1968. С. 263–270.
24. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
25. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
26. *Арнольд В.И.* Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах // Функц. анализ и его прил. 2002. Т. 36. Вып. 2. С. 1–11.
27. *Davydov A., Vinnikov E.* Optimal cyclic dynamic of distributed population under permanent and impulse harvesting // Dynamic Control and Optimization. DCO 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2023. V. 407. P. 101–112.

28. *Винников Е.В., Давыдов А.А., Туницкий Д.В.* Существование максимального среднего временного сбора в КПП-модели на сфере при постоянном и импульсном отборах // ДАН. 2023. Т. 514. С. 59–64.

29. *Гаевский К., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

30. *Туницкий Д.В.* О слабых решениях полулинейных параболических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях // Труды 15-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2022). 26–28 сентября 2022 г., Москва, Россия. М.: ИПУ РАН, 2022. С. 613–619.

31. *Tunitsky D.V.* On Initial Value Problem for Semilinear Second Order Parabolic Equations on Spheres // Proceedings of the 15th International Conference «Management of large-scale system development» (MLSD), 26–28 September, 2022, Moscow, Russia. IEEE Explore, 9 November 2022. P. 1–4. https://ieeexplore.ieee.org/document/9934193

32. *Туницкий Д.В.* О стабилизации решений полулинейных параболических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях // Известия РАН. Серия математическая. 2023. Т. 87. № 4. С. 186–204.

33. *Hess P.* Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity. New York, Pitman Research Notes in Math. Series, 1991.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 03.05.2024

После доработки 27.05.2024

Принята к публикации 30.05.2024